

PIERWIASTKI W UŁAMKACH ŁAŃCUCHOWYCH

Ułamki łańcuchowe mają postać:

$$n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{\alpha}}}}$$

Niech $a, b > 0$ będą liczbami naturalnymi. Rozważmy nieskończony ułamek łańcuchowy:

$$x = \frac{a}{2b + \frac{a}{2b + \frac{a}{2b + \dots}}}$$

Można udowodnić, że powyższe wyrażenie ma skończoną wartość. Mamy wówczas równanie:

$$x = \frac{a}{2b + x}, \quad \cdot (2b + x)$$
$$x^2 + 2bx = a.$$

Ponieważ $(x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$ więc możemy zapisać $(x+b)^2 = a + b^2$. Teraz, rozwiązując równanie kwadratowe bierzemy pod uwagę tylko rozwiązanie dodatnie i otrzymujemy:

$$x + b = \sqrt{b^2 + a},$$
$$\sqrt{b^2 + a} = b + x,$$
$$\sqrt{b^2 + a} = b + \frac{a}{2b + \frac{a}{2b + \frac{a}{2b + \dots}}}$$

Przykłady wyznaczania przybliżonych wartości pierwiastków dla:

1. $a=1, b=1$ wtedy $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$

Obliczmy przybliżoną wartość $\sqrt{2}$, uwzględniając tylko cztery łańcuchy:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{12}} = 1 + \frac{1}{\frac{29}{12}} = 1 \frac{12}{29} \approx 1,4137931.$$

Obliczona wartość jest oczywiście przybliżona. Dokładność zależy od ilości użytych łańcuchów. Wartość $\sqrt{2}$ z dokładnością do siedmiu miejsc po przecinku wynosi: 1,4142135.